Halmazok
Megoldások

1) Egy gimnázium egyik érettségiző osztályába 30 tanuló jár, közülük 16 lány. A lányok testmagassága centiméterben mérve az osztályozó naplóbeli sorrend szerint:
166, 175, 156, 161, 159, 171, 167, 169, 160, 159, 168, 161, 165, 158, 170, 159

a) Számítsa ki a lányok testmagasságának átlagát! Mekkora az osztály tanulóinak centiméterben mért átlagmagassága egy tizedesjegyre kerekítve, ha a fiúk átlagmagassága 172,5 cm? (5 pont)

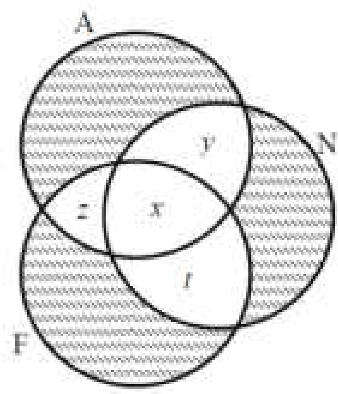
Ebben a 30 fős osztályban a tanulók három idegen nyelv közül választhattak, ezek az angol, német és francia.

b) Hányan tanulják mindhárom nyelvet, és hányan nem tanulnak franciát, ha tudjuk a következőket:
(1) Minden diák tanul legalább két nyelvet.
(2) Az angolt is és németet is tanuló diákok száma megegyezik a franciát tanuló diákok számával.
(3) Angolul 27-en tanulnak.
(4) A németet is és franciát is tanulók száma 15. (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Statisztika 1. feladat*

b) Ha az osztály 30 tanulóját a három tanult nyelv szerint Venn-diagramon ábrázoljuk, csak négy tartományba jut tanuló, az ábra alapján jelöljük az egyes tartományokat x-szel, y-nal, z-vel és t-vel. (2 pont)



(1) alapján $x+y+z+t=30$

(2) alapján $z+t=y$

(3) alapján $x+y+z=27$

(4) alapján $x+t=15$ (2 pont)

Ezekből: $x=12, y=9, z=6, t=3$ (2 pont)

Három nyelven 12-en tanulnak, és 9-en nem tanulnak franciát. (1 pont)

Összesen: 12 pont

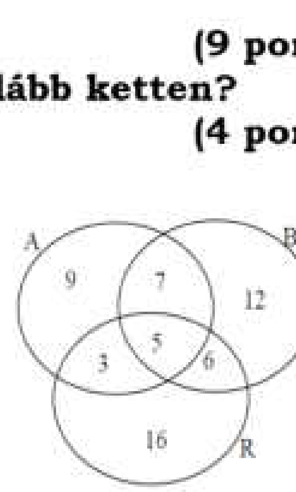
2) Anett és Berta egy írott szöveget figyelmesen átolvasott. Anett 24 hibát talált benne, Berta 30-at. Ezek között 12 hiba volt csak, amit mindketten észrevettek. Később Réka is átnézte ugyanazt a –javítatlan-szöveget, és ő is 30 hibát talált. Réka az Anett által megtalált hibákból 8-at vett észre, a Berta által észleltekből 11-et. Mindössze 5 olyan hiba volt, amit mind a hárman észrevettek.

a) Együtt összesen a szöveg hány hibáját fedezték fel? (9 pont)

b) A megtalált hibák hány százalékát vették észre legalább ketten? (4 pont)

Megoldás:

a) A halmazok elemei a lányok által megtalált hibák (1 pont)



Helyes kitöltés (7 pont)

A felfedezett hibák számát a részhalmazokba írt elemszámok összege adja. **Tehát a három lány összesen 58 hibát fedezett fel.** (1 pont)

b) Legalább ketten vették észre a hibát, ha pontosan ketten, vagy ha pontosan hárman találták meg azt. (1 pont)

Az első csoportba $7+6+3$, a másodikba 5 hiba tartozott. Legalább ketten észleltek 21 hibát. (2 pont)

Ez az összes észlelt hiba $\frac{21}{58}=0,36$-ad része, azaz **36%** (1 pont)

Összesen: 13 pont

3) A Kovács családban 4 embernek kezdődik a keresztneve B betűvel. Négyen teniszeznek, és négyen kerékpároznak rendszeresen.
A család tagjairól tudjuk:

- **csak Bea és Barbara jár teniszezni és kerékpározni is;**
- **egyedül Balázs nem űzi egyik sportágat sem**
- **Zoli próbálja testvérét, Borit a teniszezőktől hozzájuk, a kerékpározókhoz csábítani- sikertelenül.**

a) A fentiek alapján legalább hány tagja van a Kovács családnak?(5 pont)

Egyik nap Barbara, Bea, Bori és Balázs barátaikkal vonaton utaztak, és hogy jobban teljen az idő, játszottak. A játék kezdetekor a társaság minden tagjának egy-egy olyan háromjegyű pozitív számra kellett gondolnia, amelynek minden számjegye 4-nél nagyobb és 7-nél kisebb. Amikor sorra megmondták a gondolt számot, kiderült, hogy nincs a mondott számok között azonos.

b) Legfeljebb hány tagú lehetett a társaság? (3 pont)

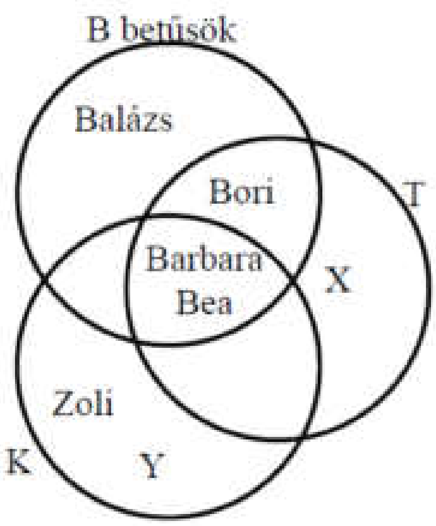
Egy másik alkalommal Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt.

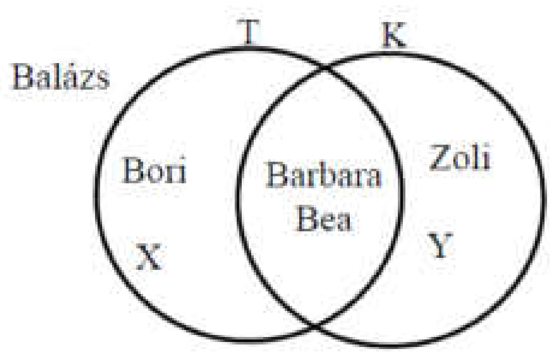
c) A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé? (5 pont)

d) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a c) pont szerinti ülésrend alakul ki, ha minden ülésrend egyenlően valószínű? (3 pont)

Megoldás:

a) Jelölje *T* a teniszezők, *K* a kerékpározók halmazát a Kovács családon belül.
Barbara, Balázs, Bea, Bori elhelyezése (1 pont)





Zoli elhelyezése (1 pont)
Új családtag elhelyezése *T* halmazon belül (1 pont)
Új családtag elhelyezése *K* halmazon belül (1 pont)
A Kovács családnak tehát legalább 7 tagja van. (1 pont)

b) *Lásd: Kombinatorika 10. feladat*
c) *Lásd: Kombinatorika 10. feladat*
d) *Lásd: Kombinatorika 10. feladat*

Összesen: 16 pont

4) Legyen $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{x-1}\geq\sqrt{5-x}\right\}$ és $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)>-2\right\}$. Adja meg az $A\cup B$, $A\cap B$, B/A halmazokat! **(13 pont)**

Megoldás:

$x-1\geq 0$ és $5-x\geq 0$ (1 pont)

ezért az egyenlőség értelmezési tartománya $[1;5]$ (1 pont)

Mindkét oldal nem negatív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás. Ebből: $x\geq 3$ (1 pont)

Így $A=[3;5]$ (1 pont)

Az $\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)>-2$ egyenlőség értelmezési tartománya $]2;\infty[$ (2 pont)

Az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan csökkenő (1 pont)

ezért $2x-4<4$ (1 pont)

Innen $x<4$

Így $B=]2;4[$ (2 pont)

$\boldsymbol{A\cup B}=]\mathbf{2;5}]$ (1 pont)

$\boldsymbol{A\cap B}=[\mathbf{3;4}[$ (1 pont)

$\boldsymbol{B/A}=]\mathbf{2;3}[$ (1 pont)

Összesen: 13 pont

5) Egy város 18 étterme közül 11-ben reggelit, 11-ben vegetáriánus menüt lehet kapni, és 10-ben van felszolgálás. Mind a 18 étterem legalább egy szolgáltatást nyújt az előző három közül. Öt étteremben adnak reggelit, de nincs vegetáriánus menü. Azok közül az éttermek közül, ahol reggelizhetünk, ötben van felszolgálás. Csak egy olyan étterem van, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható.

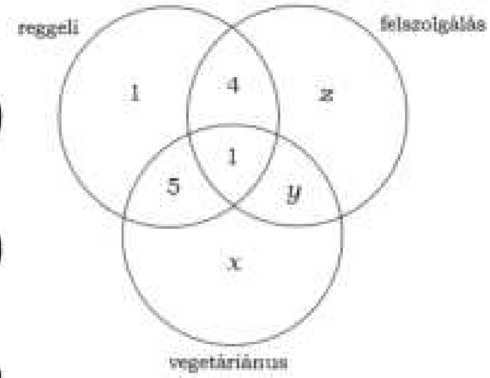
a) Hány étteremben lehet vegetáriánus menüt kapni, de reggelit nem? **(5 pont)**

b) Hány olyan étterem van, ahol felszolgálnak vegetáriánus menüt? **(6 pont)**

c) A Kiskakas étteremben minden vendég a fizetés után nyereménysorsoláson vehet részt. Két urnát tesznek elé, amelyekben golyócskák rejtik a város egy-egy éttermének nevét. Az *A* urnában a város összes vendéglőjének neve szerepel, mindegyik pontosan egyszer. A *B* urnában azoknak az éttermeknek a neve található, – mindegyik pontosan egyszer– amelyikben nincs felszolgálás. A vendég tetszés szerint húzhat egy golyót. Ha a húzott étteremben van reggelizési lehetőség, akkor a vendég egy heti ingyen reggelit nyer, ha nincs, nem nyer. Melyik urnából húzva nagyobb a nyerés valószínűsége? **(5 pont)**

Megoldás:

a) Mivel egy olyan étterem van csak, ahol mindhárom szolgáltatás megtalálható, ezért a három halmaz metszetébe 1-et írhatunk. (1 pont)



Mivel 5 étteremben van reggeli és felszolgálás is, ezért a reggeli és felszolgálás vegetáriánus menü nélkül $5-1=4$ helyen van. (1 pont)
Mivel 5 étteremben adnak reggelit, de vegetáriánus menüt nem kapni, ezért csak reggelit 1 helyen lehet kapni. (1 pont)
Mivel 11-ben lehet reggelit kapni, ezért reggeli és vegetáriánus menü felszolgálás nélkül $11-1-4-1=5$ helyen van. (1 pont)
Mivel 11 helyen van vegetáriánus menü, és ezek közül 6 helyen van reggeli is, ezért **5 helyen van vegetáriánus menü, de nincs reggeli.** (1 pont)

b) A „vegetáriánus helyek" száma miatt: $y=5-x$, a felszolgálós helyek száma $z=x$ (2 pont)
Így az összes vendéglők száma $11+2x+5-x=18$ (1 pont)
ahonnan $x=2$ (1 pont)
ezért $y=3$; $z=2$ (1 pont)
Tehát $y+1=$ **4 étteremben szolgálnak fel vegetáriánus menüt.** (1 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 17. feladat*

Összesen: 16 pont

6)

a) Egy osztály tanulói a tanév során három kiránduláson vehettek részt. Az elsőn az osztály tanulóinak 60 százaléka vett részt, a másodikon 70 százalék, a harmadikon 80 százalék. Így három tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult.
Hány tanulója van az osztálynak? (6 pont)

b) A három közül az első kiránduláson tíz tanuló körmérkőzésen asztalitenisz-bajnokságot játszott. (Ez azt jelenti, hogy a tíz tanuló közül mindenki mindenkivel pontosan egy mérkőzést vívott.) Mutassa meg, hogy 11 mérkőzés után volt olyan tanuló, aki legalább háromszor játszott! (4 pont)

c) A második kirándulásra csak az osztály kosárlabdázó tanulói nem tudtak elmenni, mivel éppen mérkőzésük volt. A kosarasok átlagmagassága 182 cm, az osztály átlagmagassága 174,3 cm. Számítsa ki a kiránduláson részt vevő tanulók átlagmagasságát! (6 pont)

Megoldás:

a) Ha az első kiránduláson az osztály 60%-a vett részt, akkor csak a második és harmadik kiránduláson az osztály 40%-a. Hasonlóan adódik, hogy csak az első és harmadik kiránduláson az osztály 30%-a, csak az első és második kiránduláson az osztály 20%-a vett részt. (3 pont)
Mivel nem volt olyan tanuló, aki csak egy kiránduláson vett volna részt, ezért az osztály 10%-a vett részt minden kiránduláson. (2 pont)
Az előző megállapítás és a feltétel alapján az osztály létszáma **30**. (1 pont)

Alternatív megoldás:

(algebrai megoldás)

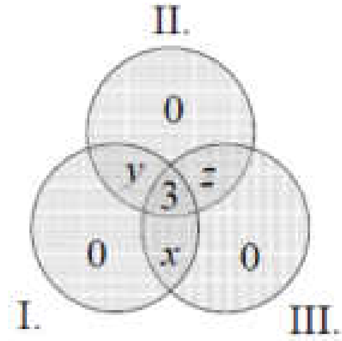
$x+y+3=0,6(3+x+y+z)$

$y+z+3=0,7(3+x+y+z)$

$z+x+3=0,8(3+x+y+z)$

$4x+4y-6z=-12$

$-7x+3y+3z=-9$ (3 pont)



$2x-8y+2z=-6$

$x-y=3$

$2x-3y=0$ (1 pont)

$x=9,\ y=6,\ z=12$ (1 pont)

Az osztálylétszám: $6+9+12+3=\mathbf{30}$ fő. (1 pont)

b) *Lásd: Gráfelmélet 8. feladat*

c) *Lásd: Statisztika 7. feladat*

Összesen: 16 pont

7) Jelölje A az $\frac{x+4}{x-3}=0$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát, B pedig az $|x+3|<4$ egyenlőtlenség egész megoldásainak a halmazát. Elemei felsorolásával adja meg az $A\cap B$, az $A\setminus B$ és az $A\cup B$ halmazt! (11 pont)

Megoldás:

Egy tört nempozitív, ha vagy a számlálója és a nevezője ellenétes előjelű, vagy a számlálója nulla, de a nevezője nem. (1 pont)

Első eset $x-3>0$ és $x+4\le 0$ (1 pont)

Ebből $x>3$ és $x\le -4$ (1 pont)

Ezért az A halmaz elemei {-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2} (1 pont)

Ez az abszolútértékes egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $-4<x+3<4$ (2 pont)

Azaz $-7<x<1$ Ezért a B halmaz elemei {-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0} (2 pont)

$\mathbf{A\cap B=\{-4;-3;-2;-1;0\}}$ (1 pont)

$\mathbf{A\setminus B=\{1;2\}}$ (1 pont)

$\mathbf{A\cup B=\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

8) Jelölje H a $\sqrt{5,2-x}\le 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá B azon pozitív egész b számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a H, a B, a $H\cap B$ és a $B\setminus H$ halmazt! (11 pont)

Megoldás:

A gyökös kifejezés értelmezési tartomány vizsgálata alapján: $x\le 5,2$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség elvégzése során:

$5,2-x\le 9\Rightarrow -3,8\le x$ (1 pont)

Tehát azok a pozitív számok elemei H halmaznak, melyek $-3,8$-nál nagyobbak és 5,2-nél kisebbek:

$\mathbf{H=\{1;2;3;4;5\}}$ (1 pont)

Ha $\log_b 2^6=k$, akkor $b^k=2^6$, ami 64. (2 pont)

A k kitevő pozitív egész, ezért a b olyan pozitív egész szám lehet, melynek valamely pozitív egész kitevős hatványa 64-gyel egyenlő: (1 pont)

$2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1 = 64$ (2 pont)

Ezért $\boldsymbol{B = \{2;4;8;64\}}$. (1 pont)

$\boldsymbol{H \cap B = \{2;4\}}$ (1 pont)

$\boldsymbol{B \setminus H = \{8;64\}}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

9) Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer *S* síkjában. Az *A* halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátái: $A := \{P(x;y) \in S \mid 4x - 3y \ge 18\}$; a *B* halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \le 0$,

azaz $B := \{P(x;y) \in S \mid x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \le 0\}$,

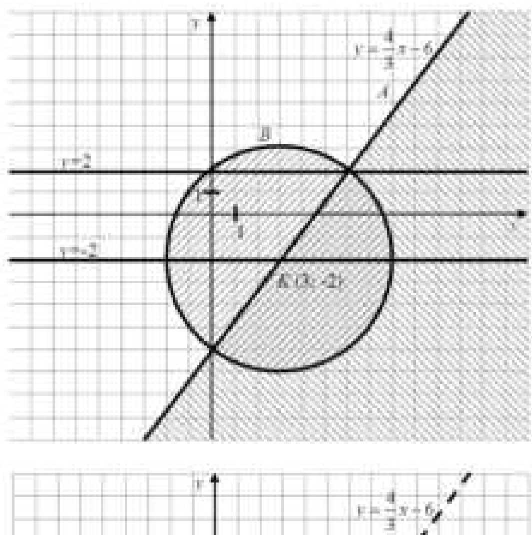
a *C* halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $y^2 = 4$, azaz $C := \{P(x;y \in S) \mid y^2 = 4\}$.

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatok az *A*, a *B* és a *C* halmaz pontjai! (8 pont)

b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B \setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz? (4 pont)

c) Ábrázolja a $B \cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x;y)$ pontja van a legközelebb, illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától? (4 pont)

<u>Megoldás:</u>



a) Az A halmaz pontjai a $y = \frac{4}{3}x - 6$ egyenletű egyenes alatti **zárt félsík** pontjai (1 pont)

Az A halmaz ábrája (1 pont)

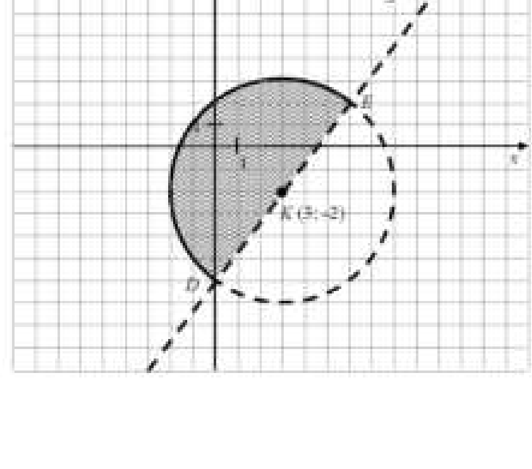
A B halmaz pontja az $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$ egyenletű **kör** és a kör belső pontjai (1 pont)

A kör középpontja $K(3;-2)$, sugara $r = 5$ (1 pont)

A B halmaz ábrája (2 pont)

A C halmaz pontjai az $y = 2$ és $y = -2$ egyenletű **párhuzamos egyenesek** pontjai (1 pont)

A C halmaz ábrája (1 pont)

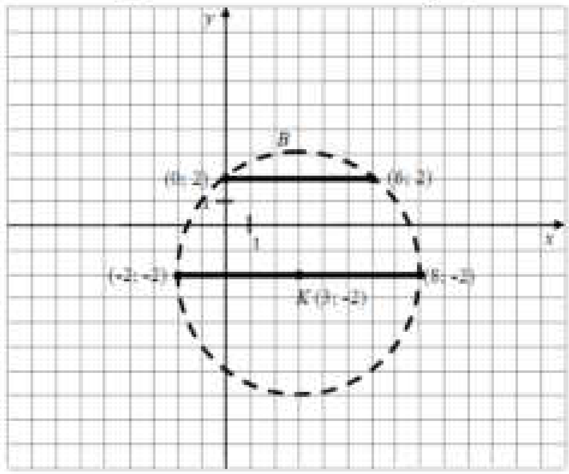


b) A $B \setminus A$ halmaz ábrázolása: (1 pont)

A $B \setminus A$ halmaz pontjai egy félkörlemez pontjai, amihez a félkörív és a belső pontok hozzá tartoznak, de a kör DE átmérője nem. (Az átmérő végpontjai $D(0;-6)$ és $E(6;2)$. (2 pont)

A ponthalmaz pontjai a *DE* átmérő fölött vannak. (1 pont)

c) A $B \cap C$ halmaz a B ponthalmaz határoló körének két párhuzamos húrja;
A húrok végpontjai: $(0;2)$ és $(6;2)$, valamint $(-2;-2)$ és $(8;-2)$.
(ez utóbbi húr egyben átmérő is)
A $B \cap C$ halmaz ábrázolása: (1 pont)



Az origótól a **legmesszebb** a $\mathbf{(8;-2)}$ (1 pont)
legközelebb a $\mathbf{(0;2)}$ és a $\mathbf{(0;-2)}$ pont van (2 pont)

Összesen: 16 pont

10)

a) A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával leírtuk az összes, különböző számjegyekből álló négyjegyű számot. Hány olyan van ezek között, amelyben a számjegyek összege 15? (5 pont)

b) Egy *n* elemű halmaznak 11-szer annyi 4 elemű részhalmaza van, mint 2 elemű $(n \geq 4)$. Határozza meg a halmaz elemszámát! (8 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 38. feladat*

b) Az n elemű halmaz 4 elemű részhalmazainak száma $\binom{n}{4}$,
a 2 eleműeké pedig $\binom{n}{2}$, (1 pont)
tehát megoldandó az $\binom{n}{4} = 11 \cdot \binom{n}{2}$ egyenlet. (1 pont)

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1}$$ (2 pont)

$(n(n-1) \neq 0$, tehát) egyszerűsítések után: $\frac{(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3} = 11$. (1 pont)

$n^2 - 5n - 126 = 0$ (1 pont)
Ennek pozitív gyöke a 14 (másik gyöke a −9), tehát a halmaznak **14** eleme van. (1 pont)
Ellenőrzés: a 14 elemű halmaz 2 elemű részhalmazainak száma 91, a 4 elemű részhalmazainak száma pedig 1001, és $1001 = 11 \cdot 91$. (1 pont)

Összesen: 13 pont

11) Jelölje *H* a $\sqrt{5{,}2 - x} \leq 3$ egyenlőtlenség pozitív egész megoldásainak halmazát. Jelölje továbbá *B* azon pozitív egész *b* számok halmazát, amelyekre a $\log_b 2^6$ kifejezés értéke is pozitív egész szám. Elemeinek felsorolásával adja meg a *H*, a *B*, a $H \cap B$ és a $B \setminus H$ halmazt! (11 pont)

Megoldás:

A gyökös kifejezés értelmezési tartomány vizsgálata alapján: $x \le 5{,}2$. (1 pont)

Az egyenlőtlenség elvégzése során:

$5{,}2 - x \le 9 \Rightarrow -3{,}8 \le x$ (1 pont)

Tehát azok a pozitív számok elemei H halmaznak, melyek $-3{,}8$-nál nagyobbak és 5,2-nél kisebbek: $\boldsymbol{H = \{1; 2; 3; 4; 5\}}$ (1 pont)

Ha $\log_b 2^6 = k$, akkor $b^k = 2^6$, ami 64. (2 pont)

A k kitevő pozitív egész, ezért a b olyan pozitív egész szám lehet, melynek valamely pozitív egész kitevős hatványa 64-gyel egyenlő: (1 pont)

$2^6 = 4^3 = 8^2 = 64^1 = 64$ (2 pont)

Ezért $\boldsymbol{B = \{2; 4; 8; 64\}}$. (1 pont)

$\boldsymbol{H \cap B = \{2; 4\}}$ (1 pont)

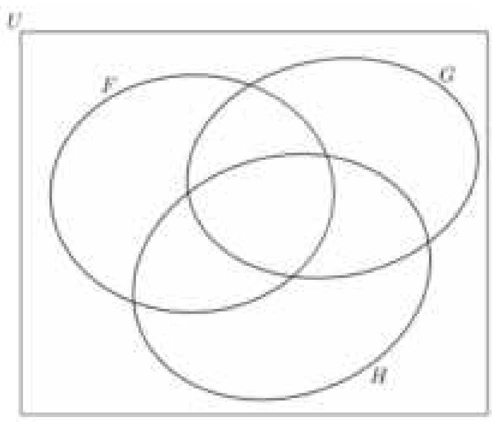
$\boldsymbol{B \setminus H = \{8; 64\}}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

12) Legyen az *U* alaphalmaz a legalább 4 pontú egyszerű gráfok halmaza. Az *F* halmaz az *U* elemei közül pontosan azokat tartalmazza, amelyek fagráfok, a *G* halmaz pontosan azokat, amelyek összefüggő gráfok, a *H* halmaz pedig pontosan azokat, amelyek 6 pontú gráfok.

a) Az alábbi ábrán satírozással jelölje meg, és halmazműveletekkel is adja meg az *U*-nak azt a részhalmazát, amelyik üres halmaz! (2 pont)

b) A megadott Venn-diagram minden egyes további részébe rajzoljon pontosan egy lehetséges gráfot! (5 pont)



Egy telephely *K, L, M, N, P, Q* épületei közül az éjszakai ellenőrzés során ötöt ellenőriz a biztonsági őr.

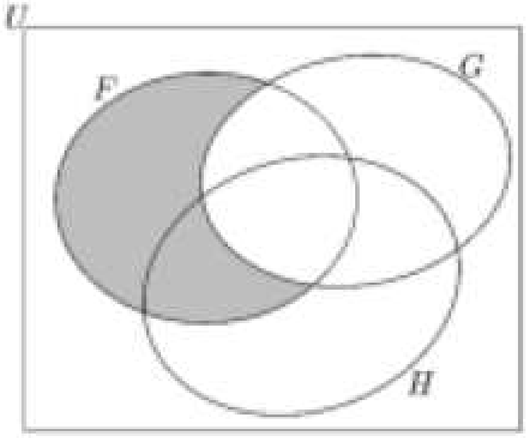
c) Hányféleképpen tervezheti meg az útvonalát, ha *K* és *L* épületeket mindenképp ellenőrzi? (Két útvonal különböző, ha a két út során más épületeket, vagy ugyanazokat az épületeket, de más sorrendben ellenőriz a biztonsági őr.) (4 pont)

Megrajzoltuk a *ABCDE* konvex ötszög oldalait és átlóit, majd a megrajzolt szakaszok mindegyikét vagy kékre, vagy zöldre színeztük. A színezés befejezése után észrevettük, hogy nincs olyan háromszög, amelynek csúcsai az *A, B, C, D, E* pontok közül valók, és mindhárom oldala azonos színű.

d) Igazolja (például indirekt módszerrel), hogy nincs olyan csúcsa az ötszögnek, amelyből legalább három azonos színű szakasz indul ki! (5 pont)

Megoldás:

a)



(1 pont)

$F \cap \overline{G} = \emptyset$ (1 pont)

b) *Lásd: Gráfelmélet 13. feladat*

c) Az *M, N, O, P, Q* épületek közül 3 különbözőt $5 \cdot 4 \cdot 3 (= 60)$-féle sorrendben járhat be az őr. (1 pont)

A három kiválasztott épület elé, közé vagy mögé 4 helyre sorolható a *K*, majd az így kapott négy épülethez képest 5 helyre sorolható az *L* épület. (1 pont)

Így összesen $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$ (1 pont)

$=$ **1200**-féle útvonal lehetséges. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Az *M, N, O, P, Q* épületek közül 3-at $\binom{5}{3}$ féleképpen választhat ki az őr. (1 pont)

A három épülethez hozzávéve *K*-t és *L*-et, megkapja az 5 ellenőrizendő épületet, amelyek bejárási sorrendje $5!$-féle lehet. (1 pont)

Így összesen $\binom{5}{3} \cdot 5! =$ (1 pont)

$=$ **1200**-féle útvonal lehetséges. (1 pont)

d) *Lásd: Bizonyítások 28. feladat*

Összesen: 16 pont

13) Legyen az alaphalmaz a háromjegyű pozitív egész számok halmaza. Az *A* halamaz elemei azok a háromjegyű számok, amelyekben van 1-es, a *B* halmaz elemei azok, amelyekben van 2-es, a *C* halmaz elemei pedig azok, amelyekben van 3-as számjegy.

a) Hány eleme van az $A \setminus (B \cap C)$ halmaznak? (5 pont)

Egy szerepjátékhoz használt dobókocka három lapján 3-as, két lapján 2-es, egy lapján 1-es szám van. A feldobott kocka mindegyik lapjára egyforma valószínűséggel esik.

b) Két ilyen dobókockával egyszerre dobva mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összeg 4 lesz? (5 pont)

Andi és Béla a következő játékot játsszák ezzel a dobókockával. Valamelyikük dob egyet a kockával. Ha a dobás eredménye 3, akkor Andi fizet Bélának *n* forintot $(n > 80)$; ha a dobás eredménye 1, akkor Béla fizet $(n - 80)$ forintot Andinak; ha pedig a dobás eredménye 2, akkor is Béla fizet Andinak $2(n - 80)$ forintot.

c) Mennyit fizet Béla Andinak az 1-es dobása esetén, ha ez a játék igazságos, azaz mindkét játékos nyereményének várható értéke 0? (6 pont)

Megoldás:

a) A háromjegyű számok száma 900, (1 pont)
ezek között $8\cdot9\cdot9=648$ olyan van, amelyben nincs 1-es. (1 pont)
Az *A* halmaz elemeinek száma tehát $9\cdot10\cdot10-8\cdot9\cdot9=252$. (1 pont)
Azokat a háromjegyű számokat kell az *A* halmazból elhagynunk, amelyekben a 2-es és a 3-as számjegy is szerepel (vagyis amelyek az 1, 2, 3 számjegyekből állnak). Ilyen háromjegyű számból 6 darab van. (1 pont)
Az $A\setminus(B\cap C)$ halmaz elemszáma $252-6=\mathbf{246}$. (1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 59. feladat*

c) *Lásd: Szöveges feladatok 37. feladat*

Összesen: 16 pont

14)

a) Határozza meg az *m* valós szám összes lehetséges értékét úgy, hogy az alábbi kijelentés igaz legyen!
Az $x^2-2x+4=mx$ egyenletnek pontosan két különböző valós gyöke van. **(6 pont)**

b) Mutassa meg, hogy az alábbi kijelentés igaz!
Az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{3}{(1+\cos x)^2+2}$ függvény értékkészlete az $\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$ intervallum. **(5 pont)**

c) Tudjuk, hogy az *A*, *B*, *C* kijelentések mindegyike 0,6 valószínűséggel igaz és 0,4 valószínűséggel hamis. Ebben az esetben mennyi annak a valószínűsége, hogy $(A\wedge B)\vee C$ kijelentés igaz? **(5 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Paraméter 15. feladat*

b) *Lásd: Függvények – Analízis 47. feladat*

c) Az $(A\wedge B)\vee C$ kijelentés pontosan akkor igaz, ha $A\wedge B$, illetve C közül legalább az egyik igaz. (1 pont)
$A\wedge B$ igaz és C igaz (vagyis mindhárom kijelentés igaz) valószínűsége: $0,6^3=0,216$. (1 pont)
$A\wedge B$ igaz és C hamis valószínűsége: $0,6^2\cdot0,4=0,144$. (1 pont)
$A\wedge B$ hamis és C igaz valószínűsége: $(1-0,6^2)\cdot0,6=0,384$. (1 pont)
Tehát a keresett valószínűség: $0,216+0,144+0,384=0,744$. (1 pont)

Alternatív megoldás:

c) Az $(A\wedge B)\vee C$ kijelentés pontosan akkor igaz, ha $A\wedge B$, illetve C közül legalább az egyik igaz. (1 pont)
$A\wedge B$ igaz valószínűsége $0,6^2=0,36$. (1 pont)
C igaz valószínűsége $0,6$. (1 pont)
Mindkétszer figyelembe vettük azt az eseményt, hogy $A\wedge B$ igaz és C is igaz, ennek $0,36\cdot0,6=0,216$ a valószínűsége. (1 pont)
A szitaformula szerint a kérdezett valószínűség:
$0,36+0,6-0,216=0,744$. (1 pont)

c) A komplementer esemény valószínűségét meghatározva oldjuk meg a feladatot. Az $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés pontosan akkor hamis, ha $A \wedge B$ hamis és C is hamis. (1 pont)

Az $A \wedge B$ hamis, ha legalább az egyik kijelentés hamis, ennek $2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,42 = 0,64 = 1 - 0,6^2$ a valószínűsége. (2 pont)

Annak a valószínűsége, hogy $A \wedge B$ hamis és C is hamis $0,64 \cdot 0,4 = 0,256$. (1 pont)

Annak a valószínűsége tehát, hogy $(A \wedge B) \vee C$ kijelentés igaz: $1 - 0,256 = 0,744$.

(1 pont)

c)

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	*valószínű-sége*
i	*i*	*i*	*i*	*i*	$0,6^3$
i	*i*	*h*	*i*	*i*	$0,6^2 \cdot 0,4$
i	*h*	*i*	*h*	*i*	$0,6^2 \cdot 0,4$
i	*h*	*h*	*h*	*h*	
h	*i*	*i*	*h*	*i*	$0,6^2 \cdot 0,4$
h	*i*	*h*	*h*	*h*	
h	*h*	*i*	*h*	*i*	$0,6 \cdot 0,4$
h	*h*	*h*	*h*	*h*	

(4 pont)

A kérdezett valószínűség: $0,6^3 + 3 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,4^2 = 0,744$. (1 pont)

Összesen: 16 pont